Решение варианта № 1

1

$100\% - 16\% = 84\%$ — составляет количество яблок от общего числа фруктов.

$25 \cdot \dfrac{84}{100} = 21$ (шт.) — количество яблок.

Ответ: 21.

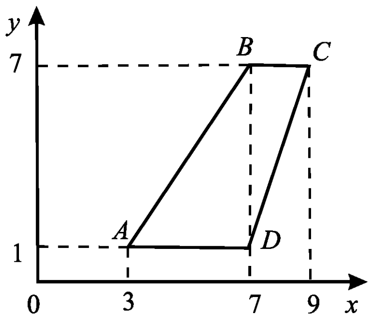
2

По графику получим, что в начале реакции было 15 кг реагента, а через 4 минуты осталось 3 кг реагента. Значит, за первые четыре минуты в реакцию вступило 12 кг реагента.

Ответ: 12.

3

Обозначим трапецию $ABCD$ (см. рис.). BC — меньшее основание, $BC = 9 - 7 = 2$. AD — большее основание, $AD = 7 - 3 = 4$.



BD — высота трапеции, $BD = 7 - 1 = 6$.

$S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BD = \dfrac{2+4}{2} \cdot 6 = 18.$

Ответ: 18.

4

На каждом из разветвлений лошадь выбирает одно направление из двух возможных. Всего выбор направления делается 4 раза, каждый раз независимо от предыдущего выбора. Вероятность того, что каждый раз выбирается один путь из двух, а разветвлений 4, равна $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625.$

Ответ: 0,0625.

5

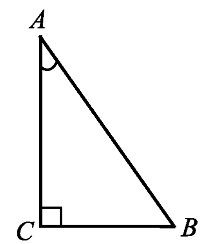
$\log_4(x+4)^2 = \log_4(5x+20)$; $(x+4)^2 = 5x+20$; $x^2+8x+16-5x-20 = 0$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.
Сделаем проверку.
$x = 1$; $\log_4(1+4)^2 = \log_4(5 \cdot 1 + 20)$; $\log_4 25 = \log_4 25$.
$x = -4$; $\log_4(-4+4)^2$ не имеет смысла.
Значит, корень уравнения $x = 1$.

Ответ: 1.

6

Так как $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$ (см. рис.), то $AB = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{BC}{\sqrt{1-\cos^2 A}} =$

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1-0{,}25}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{0{,}5\sqrt{3}} = 10.$



Ответ: 10.

7

На рисунке изображён график производной функции $y = f(x)$. Точка максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 10]$ — это точка, при переходе через которую производная меняет знак с «+» на «−». Таких точек две.

Ответ: 2.

8

$V_{\text{цил}} = \pi R^2 h$, где R — радиус основания цилиндра, h — его высота. Так как $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — сторона правильного треугольника, лежащего в основании призмы, то $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. По условию, $h = \dfrac{12}{\pi}$. Следовательно,

$V_{\text{цил}} = \pi \dfrac{49 \cdot 3}{9} \cdot \dfrac{12}{\pi} = 196.$

Ответ: 196.

9

$$5\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12} = 2{,}5\sin\frac{11\pi}{6} = 2{,}5\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -2{,}5\sin\frac{\pi}{6} = -2{,}5\cdot 0{,}5 = -1{,}25.$$

Ответ: $-1{,}25$.

10

Найдём, с какой наименьшей скоростью будет двигаться автомобиль на расстоянии 0,4 км от старта, если приобретаемое ускорение не меньше 8000 км/ч^2.

$v^2 = 2la$, $l = 0{,}4$ км от старта, $a \geqslant 8000$ км/ч^2. $a = \dfrac{v^2}{2l}$; $\dfrac{v^2}{2l} \geqslant 8000$.

$v^2 \geqslant 2\cdot 0{,}4\cdot 8000$, $v^2 \geqslant 6400$, $|v| \geqslant 80$. Так как $v > 0$, то $v \geqslant 80$.

Наименьшая скорость автомобиля равна 80 км/ч.
Ответ: 80.

11

Пусть первый сухогруз проходит расстояние x метров за 9 минут, тогда его скорость $\dfrac{x}{9}$ (м/мин). Второй сухогруз проходит расстояние $360 + 140 + 80 + 500 + x$ (м) тоже за 9 минут, то есть его скорость $\dfrac{1080 + x}{9}$ (м/мин).

Отсюда скорость второго сухогруза больше скорости первого сухогруза на $\dfrac{1080 + x}{9} - \dfrac{x}{9} = \dfrac{1080}{9} = 120$ (м/мин) $= 120\cdot\dfrac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{60}} = 7{,}2$ (км/ч).

Ответ: 7,2.

12

$y = -x\sqrt{x} + 6x = -x^{\frac{3}{2}} + 6x,\ x \geqslant 0,$

$y' = -\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 6 = -\dfrac{3}{2}\sqrt{x} + 6.$

$y' = 0$, $\dfrac{3}{2}\sqrt{x} = 6$, $\sqrt{x} = 4$, $x = 16$.

При $0 \leqslant x < 16$ $y' > 0$, при $x > 16$ $y' < 0$. $x = 16$ — точка максимума.

Ответ: 16.

13

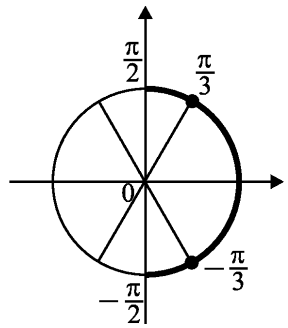
а) Используя основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса двойного аргумента, получим уравнение $\operatorname{tg}^2 x = 3$, которое равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$. Получим два уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, и первую серию корней $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$;

2) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, и вторую серию корней $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in Z$.

б) На рисунке изображена числовая окружность, на которой выделена дуга от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$. Промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежат два корня:

$x_1 = -\dfrac{\pi}{3}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

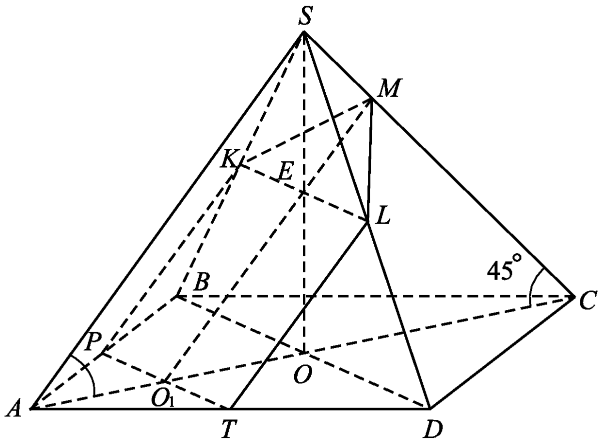


Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $-\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{3}$.

14

а) На основании условия рассмотрим чертёж (см. рис.), где SO — высота пирамиды, PT — средняя линия треугольника ABD, E — середина SO, $\angle SAC = 45^\circ$, O_1 — середина AO.

$PT \parallel BD$ (как средняя линия ΔABD), поэтому $PT \parallel SBD$. Значит, α пересекает плоскость SBD по прямой параллельной PT (а значит, и BD), проходящей через точку E.



Обозначим точки пересечения этой прямой с рёбрами SB и SD через K и L соответственно.

Точки O_1 и E лежат в плоскости α, значит, прямая O_1E также лежит в этой плоскости. Обозначим через M точку пересечения этой прямой с ребром SC. Соединяя последовательно точки T, P, K, M, L и T, получим искомое сечение.

$DB \perp ASC$, так как $DB \perp OS$ и $DB \perp OA$. $LK \parallel BD$, согласно вышесказанному, поэтому $LK \perp ASC$. Отсюда следует, что $LK \perp SM$.

$O_1E \parallel AS$ (O_1E — средняя линия ΔASO), $AS \perp SC$, так как $\angle ASC = 90°$, поэтому $O_1E \perp SC$. Отсюда следует, что $\alpha \perp SC$ (α проходит через пересекающиеся прямые LK и O_1E, перпендикулярные SC).

б) Из доказанного выше утверждения следует, что SM является высотой пирамиды $SKLM$ и $KL \perp EM$.

Так как $\angle ESM = 45°$ и $\triangle SME$ — прямоугольный, то $SM = ME$.

$$V_{SKLM} = \frac{1}{3}S_{KLM} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}KL \cdot EM \cdot SM = \frac{1}{6}KL \cdot SM^2.$$

$\triangle ASC \sim \triangle O_1MC$, $AO_1 = \frac{1}{4}AC$, поэтому $SM = \frac{1}{4}SC$.

Заметим, что треугольники ASC и ADC равны (по стороне и двум прилежащим углам), поэтому $SC = CD = 4$ и $SM = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$.

Наконец, $KL = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Отсюда получаем:

$$V_{SKLM} = \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

15

Пусть $t = 2^{3-x^2} - 1$, тогда неравенство примет вид:
$\frac{t^2 - 8t + 7}{t^2} \geqslant 0$, $\frac{(t-1)(t-7)}{t^2} \geqslant 0$, откуда $t < 0$; $0 < t \leqslant 1$; $t \geqslant 7$.

При $t < 0$ получим: $2^{3-x^2} - 1 < 0$; $3 - x^2 < 0$, откуда $x < -\sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$.

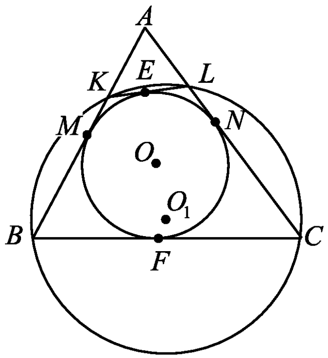
При $0 < t \leqslant 1$ получим: $0 < 2^{3-x^2} - 1 \leqslant 1$; $0 < 3 - x^2 \leqslant 1$, откуда $-\sqrt{3} < x \leqslant -\sqrt{2}$; $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$.

При $t \geqslant 7$ получим: $2^{3-x^2} - 1 \geqslant 7$; $3 - x^2 \geqslant 3$, откуда $x = 0$.

Решением исходного неравенства будет
$x < -\sqrt{3}$; $-\sqrt{3} < x \leqslant -\sqrt{2}$; $x = 0$; $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$.
Ответ: $(-\infty; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{2}]$; 0; $[\sqrt{2}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; +\infty)$.

16

а) Окружность с центром в точке O_1 описана около четырёхугольника $BKLC$ (см. рис.), значит, $\angle KBC + \angle KLC = 180°$,
$\angle KLC = 180° - \angle KBC$.



$\angle KLA + \angle KLC = 180^\circ$, $\angle KLC = 180^\circ - \angle KLA$.

Отсюда $\angle KBC = \angle KLA$.

Имеем в треугольниках ABC и ALK: $\angle A$ — общий,

$\angle ABC = \angle KBC = \angle ALK$, значит, $\triangle ABC \sim \triangle ALK$ по первому признаку подобия, что и требовалось доказать.

б) Из подобия следует $\dfrac{AB}{AL} = \dfrac{AC}{AK} = \dfrac{BC}{KL}$.

Обозначим $KE = x$, $LE = y$ и выразим AL, AK и KL через x и y. Окружность с центром в точке O вписана в $\triangle ABC$, значит, $AN = AM$, $BM = BF$, $CF = CN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности с центром в точке O из точек A, B и C соответственно. Обозначим $AM = AN = t$, тогда $BM = BF = 9 - t$, $CF = CN = 10 - t$, $BC = BF + CF = 9 - t + 10 - t = 11$, $t = 4$, $AM = AN = 4$.

Так как KE и KM, LE и LN — отрезки касательных, проведённых к окружности с центром O, то $KE = KM = x$ и $LE = LN = y$, $KL = KE + LE = x + y$.

Имеем $KL = x + y$, $AK = 4 - x$, $AL = 4 - y$.

Периметр $\triangle AKL$ равен $AK + KL + AL = 4 - x + x + y + 4 - y = 8$. Периметры подобных треугольников относятся так же, как их стороны, поэтому $\dfrac{8}{9+10+11} = \dfrac{KL}{11}$; $KL = \dfrac{4}{15} \cdot 11 = 2\dfrac{14}{15}$.

Ответ: $2\dfrac{14}{15}$.

17

Пусть кредит планируется взять на n лет. Остаток долга перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, т.е. образует убывающую арифметическую прогрессию:

$$8,\ \frac{8(n-1)}{n}, \ldots,\ \frac{8\cdot 2}{n},\ \frac{8}{n},\ 0.$$

Пусть x_1, x_2, …, x_n — выплаты (в млн рублей), который производит заёмщик с февраля по июнь каждого года. Каждая выплата состоит из постоянной части, равной $\dfrac{8}{n}$, и процентных денег, начисленных на остаток долга:

$$x_1 = \frac{8}{n} + \frac{20}{100}\cdot 8,$$

$$x_2 = \frac{8}{n} + \frac{20}{100}\cdot \frac{8(n-1)}{n},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{8}{n} + \frac{20}{100}\cdot \frac{8}{n}.$$

Таким образом, x_1, x_2, …, x_n тоже образует убывающую арифметическую прогрессию. Следовательно, наибольшим годовым платежом будет x_1. Составим и решим неравенство:

$$\frac{8}{n} + \frac{20}{100}\cdot 8 \leqslant 2{,}4,\quad \frac{8}{n} \leqslant 0{,}8,\quad n \geqslant 10.$$

Поскольку в условии задачи требуется найти минимальное значение n, то $n = 10$.

Ответ: 10.

18 Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

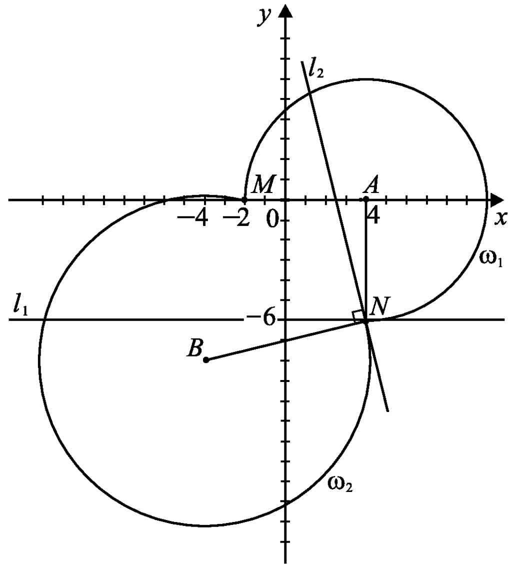
1) Если $y + x + 2 \geqslant 0$, то получим уравнение
$x^2 + 8y + y^2 - 8y - 8x - 16 = 4$,
$x^2 + y^2 - 8x = 20$,
$y^2 + (x - 4)^2 = 36$.

Полученное уравнение задаёт окружность с центром $A(4; 0)$ и радиусом 6.

2) Если $y + x + 2 \leqslant 0$, то получим уравнение
$x^2 + 8y + y^2 + 8y + 8x + 16 = 4$,
$x^2 + 8x + y^2 + 16y = -12$,
$(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = -12 + 16 + 64$,
$(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = 68$.

Полученное уравнение задаёт окружность с центром $B(-4; -8)$ и радиусом $\sqrt{68}$.

Полученные окружности пересекаются в точках $N(4; -6)$ и $M(-2; 0)$, которые лежат на прямой $y + x + 2 = 0$, и мы получаем две дуги ω_1 и ω_2 с концами в этих точках (см. рис.).



Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую, проходящую через точку $N(4; -6)$.

При $a = 0$ прямая l_1 проходит через N и $l_1 \perp AN$, значит, l_1 касается ω_1 и пересекает ω_2 в N и ещё одной точке, то есть система имеет 2 решения.

Найдём a, при котором прямая l_2 проходит через N и $l_2 \perp BN$. Прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно -1. $K_{BN} = \dfrac{1}{4}$, $K_{BN} \cdot a = -1$, $a = -4$.

При $a = -4$ прямая l_2 касается ω_2 и пересекает ω_1 в точке N и ещё одной точке, при этом система имеет 2 решения.

При $a < -4$ прямая пересекает каждую из дуг в двух точках, одна из которых N, значит, система имеет 3 решения.

При $a > 0$ аналогично в системе 3 решения.

При $-4 < a < 0$ система имеет ровно 2 решения.

Таким образом, ровно 2 различных решения система имеет при $-4 \leqslant a \leqslant 0$.

Ответ: $[-4; 0]$.

19 а) Да, пусть рейтинги отдела A были: 7, 7, 4, а рейтинги отдела B — 2, 2, 2. Из отдела A перешёл человек с рейтингом 4. В отделе A рейтинг был $\dfrac{7+7+4}{3} = 6$, стал $\dfrac{7+7}{2} = 7$, в отделе B был рейтинг 2, стал $\dfrac{2+2+2+4}{4} = 2{,}5$. Рейтинги увеличились.

б) Пусть рейтинг отдела A был не больше, чем рейтинг отдела B, $R_A \leqslant R_B$, рейтинг людей отдела A — Q_{1A}, Q_{2A}, Q_{3A}, а отдела B — Q_{1B}, Q_{2B}, Q_{3B}.

Тогда $R_A = \dfrac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}}{3}$, $R_B = \dfrac{Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}}{3}$.

После объединения рейтинг отдела стал равен

$$R_A = \frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}}{6} = \frac{3R_A+3R_B}{6} = \frac{R_A+R_B}{2}.$$

Если $R_A = R_B$, то $R = R_A = R_B$.

Если $R_A < R_B$, то $R = \dfrac{R_A+R_B}{2} < \dfrac{R_B+R_B}{2} = R_B$, $R < R_B$.

При этом $R = \dfrac{R_A+R_B}{2} > \dfrac{R_A+R_A}{2} = R_A$, $R > R_A$.

Значит, рейтинг не может стать меньше как рейтинга отдела A, так и рейтинга отдела B.

в) Запишем разность

$$R - R_A = \frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}}{6} - \frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}}{3} =$$

$$= \frac{Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}-(Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A})}{6}.$$

Но $Q_{iB} \leqslant 9$, а $Q_{iA} \geqslant 1$, тогда $R - R_A \leqslant \dfrac{9+9+9-(1+1+1)}{6} = 4$.

Пример: рейтинги группы A — 1, 1, 1, группы B — 9, 9, 9.

После объединения рейтинг стал $\dfrac{3+9\cdot 3}{6} = 5$,

разность $R - R_A = 5 - 1 = 4$.

Ответ: а) да, б) нет, в) 4.